ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τομές Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Μάθημα: **Διαφορική Γεωμετρία**
Διδάσκων: Βλάχος Θεόδωρος
Ιανουάριος 2019

Θέμα 1

(i) Θεωρούμε την καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε, $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το μήκος τόξου με αφετηρία το $t_0 = 0$, να δείξετε ότι η καμπύλη c είναι κανονική, να υπολογίσετε την καμπυλότητα αυτης ως συνάρτηση του t και του μήκους τόξου s και τέλος, να εξετάσετε αν υπάρχει κάθετη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έχει η καμπύλη αυτοτομές; Γιατι;

(ii) Έστω X κανονική επιφάνεια για την οποία σε κάθε σημείο τέμνονται κάθετα οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις. Να αποδείξετε ότι η X είναι ελαχιστική.

Θέμα 2

Έστω επιφάνεια S με εξίσωση:

$$z = \log x - \log y, x > 0 \text{ και } y > 0.$$

(i) Να βρείτε τις κύριες διευθύνσεις στο σημείο $P_0(1, 1, 0)$

(ii) Να εξετάσετε αν η επιφάνεια είναι ευθυογενής ή αναπτυκτή.

(iii) Να εξετάσετε αν η επιφάνεια είναι τοπικά ισομετρική με κάποια άλλη επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι ελλειπτικά.

(iv) Να βρείτε την εικόνα της απεικόνισης Gauss της επιφάνειας και να εξετάσετε αν η απεικόνιση αυτή είναι $1 - 1$

Θέμα 3

Ας είναι μια κανονική καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$,με καμπυλότητα $k(s) > 0$, στρέψη τ, I ένα ανοιχτό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ και το πλαίσιο Frenet αυτής $[\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}]$. Έστω επίσης η γραμμική συνάρτηση $W = \tau(s)\vec{t}(s) + k(s)\vec{b}(s)$.
Να αποδείξετε ότι:

(i) $\dot{\vec{t}} = W \times \vec{t}$, $\dot{\vec{n}} = W \times \vec{n}$ και $\dot{\vec{b}} = W \times \vec{b}$.

(ii) W σταθερή **αν και μόνο αν** c κύκλος ή κυλινδρική έλικα.

(iii) αν θεωρήσουμε την παραμετρική επιφάνεια $X(s, v) = c(s) + vW(s), s \in I, v \in \mathbb{R}$ τότε :

  (a) η X αναπτυκτή.

  (b) η καμπύλη c είναι σταθερής κλίσης **αν και μόνο αν** η παραμετρική επιφάνεια X είναι κυλινδρική.

  (c) η X κωνική **αν και μόνο αν** $\dfrac{\tau}{k} = \alpha s + \beta,\ \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ